模块一 同角三角函数关系与诱导公式

第 1 节 三角函数的定义（★☆）

强化训练

1.（2022·宁夏模拟·★）已知角θ的终边上有一点$P(-4a,3a)(a>0)$，则$2\sin\theta+\cos\theta=$（　　）

（A）$-\dfrac{2}{5}$　　（B）$\dfrac{2}{5}$　　（C）$-\dfrac{2}{5}$或$\dfrac{2}{5}$　　（D）不确定

答案：B

解析：先由三角函数定义求出$\sin\theta$和$\cos\theta$，由题意，$|OP|=\sqrt{(-4a)^2+(3a)^2}=5|a|=5a$，

所以$\sin\theta=\dfrac{3a}{|OP|}=\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{-4a}{|OP|}=-\dfrac{4}{5}$，故$2\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{5}$.

2.（2022·安徽模拟·★）已知角α终边上一点$P(m,4)(m\neq 0)$，且$\cos\alpha=\dfrac{m}{5}$，则$\tan\alpha=$_____.

答案：$\pm\dfrac{4}{3}$

解析：根据点P的坐标，求出$\cos\alpha$，建立方程解m，再求$\tan\alpha$，

由题意，$\cos\alpha=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+16}}=\dfrac{m}{5}$，解得：$m=\pm 3$，所以$\tan\alpha=\dfrac{4}{m}=\pm\dfrac{4}{3}$.

3.（★）已知$\tan\alpha=k$，且α在第三象限，则$\sin\alpha=$_____.（用k表示）

答案：$-\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

解析：要求$\sin\alpha$，可考虑在α的终边上求一个点，用三角函数定义算$\sin\alpha$，

因为α在第三象限，不妨设$P(-1,y_0)$，则$\tan\alpha=\dfrac{y_0}{-1}=k$，所以$y_0=-k$，故$P(-1,-k)$，

由三角函数定义，$\sin\alpha=\dfrac{y_0}{|OP|}=\dfrac{-k}{\sqrt{(-1)^2+(-k)^2}}=-\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$.

4.（2022·山东潍坊二模·★★）已知角α的顶点为坐标原点，始边与x轴的非负半轴重合，点$A(x_1,2)$，$B(x_2,4)$在α的终边上，且$x_1-x_2=1$，则$\tan\alpha=$（　　）

（A）2　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）-2　　（D）$-\dfrac{1}{2}$

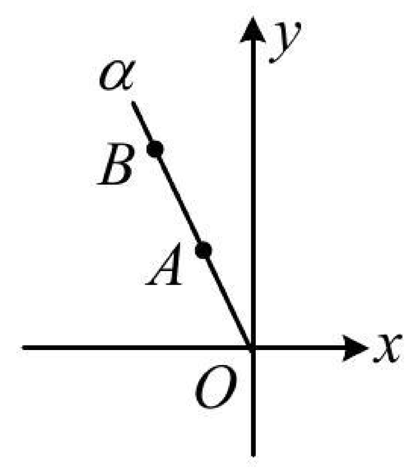
答案：C

解法 1：只要求出x_1或x_2，就可以用三角函数定义求得$\tan\alpha$，已知条件中已经有$x_1-x_2=1$这一个方程了，可用A，B的坐标把$\tan\alpha$表示出来，再建立一个x_1和x_2的方程，求解x_1或x_2，

由题意，$\tan\alpha=\frac{2}{x_1}$，$\tan\alpha=\frac{4}{x_2}$，所以$\frac{2}{x_1}=\frac{4}{x_2}$，故$x_2=2x_1$，代入$x_1-x_2=1$可得$x_1=-1$，故$\tan\alpha=\frac{2}{x_1}=-2$.

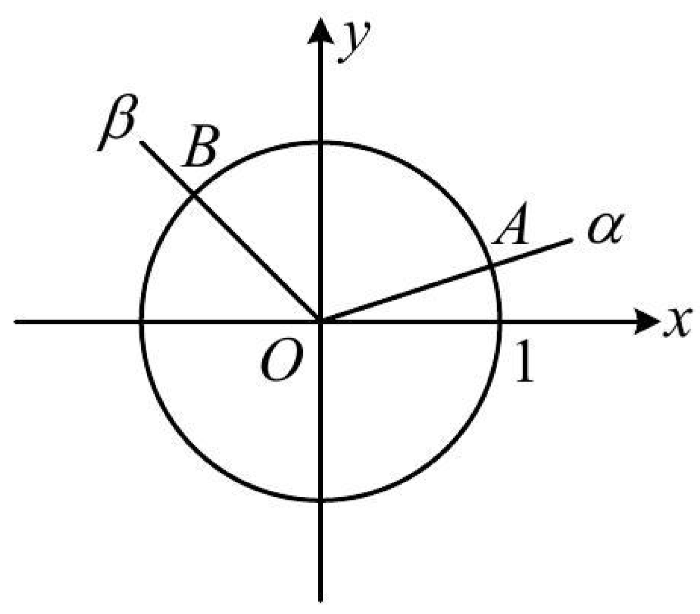
解法 2： 题干给出 A、B 两点的坐标，以及$x_1-x_2=1$，想到两点连线的斜率公式，于是先画图看看，

如图，由图可知$\tan\alpha$等于直线 AB 的斜率，所以$\tan\alpha=\frac{2-4}{x_1-x_2}=\frac{-2}{x_1-x_2}$，又$x_1-x_2=1$，所以$\tan\alpha=-2$.



5.（2022 •广东湛江期末 •★★★）如图，角α的始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于点$A(x_1,y_1)$，角$\beta=\alpha+\frac{2\pi}{3}$的始边与角$\alpha$的始边重合，且终边与单位圆交于点$B(x_2,y_2)$，记$f(\alpha)=y_1-y_2$，若$\alpha$为锐角，则$f(\alpha)$的取值范围是（　　）

（A）$(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　（B）$(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$　（C）$(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$　（D）$(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$



答案： D

解析： 给出角的终边与单位圆的交点坐标，想到用三角函数的定义把$\sin\alpha$，$\sin\beta$都表示出来，

由三角函数定义，$\sin\alpha=y_1$，$\sin\beta=\sin(\alpha+\frac{2\pi}{3})=y_2$，

所以$f(\alpha)=y_1-y_2=\sin\alpha-\sin(\alpha+\frac{2\pi}{3})$

$=\sin\alpha-(\sin\alpha\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{2\pi}{3})$

$=\frac{3}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\sqrt{3}\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})$，

因为α为锐角，所以$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，从而$-\frac{\pi}{6}<\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，故$-\frac{1}{2}<\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})<\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$f(\alpha)\in(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$.

6.（2021 • 北京卷 • ★★★）若点$A(\cos\theta,\sin\theta)$关于 y 轴的对称点为$B(\cos(\theta+\frac{\pi}{6}),\sin(\theta+\frac{\pi}{6}))$，写出$\theta$的一个取值为______.

答案： $\frac{5\pi}{12}$（答案不唯一，详见解析）

解法 1：由三角函数定义，A，B 两点分别是 θ 和 $\theta+\frac{\pi}{6}$ 的终边与单位圆的交点，

由于只需填一个值，所以不妨直接画图看，

如图 1，当 θ 与 $\theta+\frac{\pi}{6}$ 互补时，它们的终边就关于 y 轴对称，所以令 $\theta+(\theta+\frac{\pi}{6})=\pi$，解得：$\theta=\frac{5\pi}{12}$.

解法 2：由三角函数定义，A，B 两点分别是 θ 和 $\theta+\frac{\pi}{6}$ 的终边与单位圆的交点，

接下来我们也给一个完备的寻找 θ 与 $\theta+\frac{\pi}{6}$ 的关系的方法，先画图看看这两个角可能的位置，

因为 A，B 两点关于 y 轴对称，所以 θ 和 $\theta+\frac{\pi}{6}$ 的终边也关于 y 轴对称，

如图 1 和图 2，在 $[0,2\pi)$ 这个范围内，θ 可取 $\frac{5\pi}{12}$ 或 $\frac{17\pi}{12}$，

在这两个值上加 2π 的整数倍，不改变终边的位置，所以 $\theta=\frac{5\pi}{12}+2k\pi$ 或 $\frac{17\pi}{12}+2k\pi$，

注意到 $\frac{17\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}+\pi$，所以这两种结果也可以统一写成 $\theta=\frac{5\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

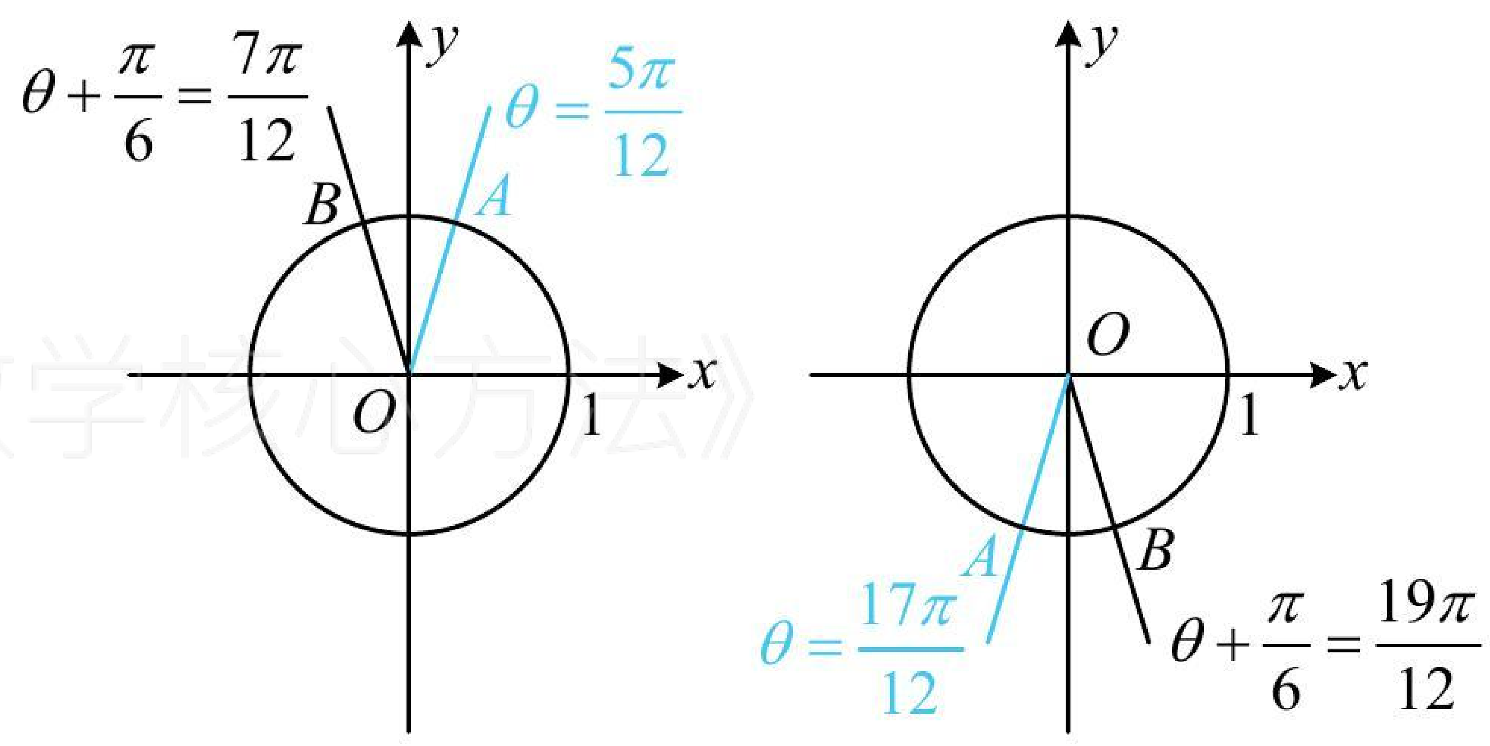


图1　　图2

7.（2022•湖北武汉模拟•★★★）已知角 α 的始边与 x 轴非负半轴重合，终边上一点 $P(\sin 3,\cos 3)$，若 $0\le\alpha\le 2\pi$，则 $\alpha=$（　　）

（A）3　（B）$\frac{\pi}{2}-3$　（C）$\frac{5\pi}{2}-3$　（D）$3-\frac{\pi}{2}$

答案：C

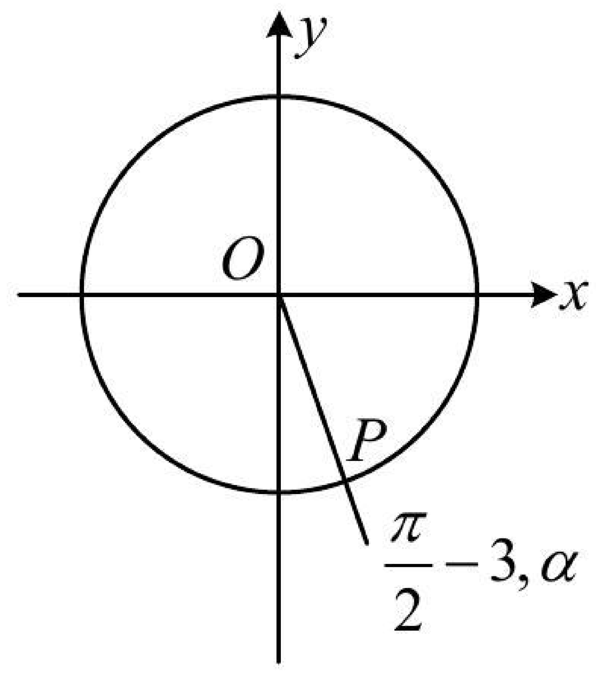
解析：给出终边上一点，先把三角函数的定义式写出来，

因为 $\sin^2 3+\cos^2 3=1$，所以点 P 在单位圆上，故 $\begin{cases}\cos\alpha=\sin 3\\ \sin\alpha=\cos 3\end{cases}$，

接下来把右侧的函数名化为和左侧一致，就可以找到 α 的终边，再化到 $[0,2\pi]$ 上即可选答案，

因为 $\sin 3=\cos(\frac{\pi}{2}-3)$，$\cos 3=\sin(\frac{\pi}{2}-3)$，所以 $\begin{cases}\cos\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-3)\\ \sin\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-3)\end{cases}$，故 α 与 $\frac{\pi}{2}-3$ 有相同的终边，如图，

所以 $\alpha=\frac{\pi}{2}-3+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，因为 $0\le\alpha\le 2\pi$，所以 $k=1$，$\alpha=\frac{5\pi}{2}-3$.



y
O
x
P
$\frac{\pi}{2}-3,\alpha$